# كاربرد دستگاه مختصات متعامد محلي در روش المان محدود توسعه يافته جهت تحليل ترك دو بعدي

علی پورکمالی انارکی[1] , مجيد ميرزائي[2]
بخش مهندسي مكانيك , دانشكده فني و مهندسي
**دانشگاه شهید رجائی**
**E-mail: ali_pourkamali@yahoo.com**

## چكيده

روش المان محدود توسعه يافته (Extended Finite Element Method : X-FEM)، يك روش عددي براي مدل كردن انواع ناپيوستگيها از جمله ترك است كه بر مبناي المان محدود استاندارد استوار است و تنها توابع خاصي با توجه به نوع ناپيوستگي به حل عددي استاندارد اضافه ميگردد. در نتيجة اعمال توابع, درجة آزادي گره‌هاي اطراف المان نوك ترك و گره‌هاي اطراف طول ترك افزايش مي‌يابد, كه به آن غني‌سازي گره‌اي گفته مي‌شود. با اين روش, ترك به صورت مجازي و مستقل از مش مدل مي‌شود و نياز به استفاده از مش ريز, المان تكينه (Singular Element) در اطراف نوك ترك و ايجاد مش مجدد در بررسي رشد ترك نخواهد بود. در اين مقاله اصول روش المان محدود توسعه يافته توضيح داده مي‌شود. يك روش جديد بر اساس دستگاه مختصات متعامد محلي نوك ترك, جهت غني‌سازي گره‌اي به كار گرفته مي‌شود. براي مدل كردن تركهاي دو بعدي به روش المان محدود توسعه يافته, اصول و روشهاي جديد در يك نرم‌افزار تخصصي استفاده شده است كه در اين مقاله به آن اشاره مي‌شود. نتايج حاصل از نرم‌افزار نوشته شده بر پاية روشهاي جديد, براي تركهايي با هندسة مختلف, در مقايسه با نتايج روابط تحليلي دقيق, تطبيق خوبي نشان مي‌دهد.

واژه‌هاي كليدي : المان محدود توسعه يافته ، مدل كردن ترك دو بعدي ، غني سازي گره‌اي , افزايش درجة آزادي

## مقدمه

مدل كردن ناپيوستگيها و به ويژه ترك هميشه از اهميت خاصي بر خودار بوده است. روشهاي المان محدود و المان مرزي از سال ۱۹۸۷ به بعد براي مدل كردن ترك به كار گرفته شده‌اند ولي در اين دو روش، تطبيق ترك با مش‌بندي و تغيير مش در هر مرحله از رشد ترك الزامي مي‌باشد. بنابراين براي حل اين مشكل Belytscho و همكارانش (۱۹۹٤) روش بدون المان را كه در آن فقط گره درمحيط مدل‌درنظرگرفته مي‌شد،بنيانگذاري كردند [۲و۱] . استفاده از مفهوم تفكيك پيوستگي (Partition of Unity) كه Melenk و Babuska [۳] و Duate و Oden [٤] در سال ۱۹۹٦ ارائه كردند چشم‌انداز جديدي براي مدل كردن ترك بوجود آورد و در سال ۱۹۹۹، Moes و همكارانش روشي بر پاية المان محدود كه نياز به مش‌بندي مجدد نداشت را براساس مفهوم تفكيك پيوستگي بنيانگذاري كردند [۵]. Dolbow در سال۱۹۹۹ جزئيات مربوط به تعيين گره‌هاي اطراف ترك و غني‌سازي آنها را بيان كرد [٦]. در سال ۲۰۰۰ Daux و همكارانش با تكميل روش Moes مباني روشي به نام المان محدود توسعه يافته را بنا نهادند [۷]. در اين روش درجات آزادي گره‌هاي اطراف ترك به صورت مجازي افزايش مي‌يابد كه اين كار غني‌سازي گره‌اي ناميده مي‌شود. در سال ۲۰۰۰ Dolbow و همكارانش با استفاده از توابع غني‌ساز مناسب از طريق روابط انرژي (J-Integral) پارامترهاي نوك ترك را به دست آوردند [۸]. در سال ۲۰۰۰، Daux و همكارانش تركهاي چند شاخه و سوراخها را به روش المان محدود توسعه يافته بررسي كردند [۷]. براي اولين بار كاربرد روش المان محدود توسعه يافته در مدل كردن تركهاي سه بعدي توسط Sukumar و همكارانش ارائه شد [۹]. در بررسي تركهاي دو

---
[1] - استاديار
[2] - استاديار

بعدي ارائه معيار تشخيص و انتخاب گره‌هايي كه بايد غني‌سازي برايشان انجام شود كار دشواري بوده است و اين مشكل در مدلهاي سه بعدي بيشتر نمود پيدا كرده است از اين رو در سال ۲۰۰۱ در حالت دو بعدي روشي به نام Level Sets توسط Stolarska و همكارانش [۱۰] و نيز Sukumar و همكارانش [۱۱] و روش ديگري در سال ۲۰۰۳ به نام Fast Marching توسط Sukumar و همكارانش در حالت سه بعدي ارائه گرديده است [۱۲].

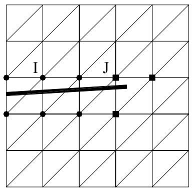
در اين مقاله اصول پاية روش المان محدود توسعه يافته تشريح خواهد شد. سپس چگونگي استفاده از روش جديد دستگاه مختصات متعامد محلي نوك ترك براي شناسايي گره‌هايي كه نياز به غني‌سازي دارند بيان مي‌گردد و از طريق آن پارامترهاي لازم جهت افزايش درجات آزادي گره‌ها به دست آورده مي‌شود. اصول اين روش و نيز معيار جديد فوق توسط مؤلفين مقاله در يك نرم‌افزار تخصصي به نام MEXFEM2D به كار گرفته شده است. اين نرم‌افزار به زبان Visual - Fortran 6.5 براي بررسي انواع حالتهاي ترك دو بعدي, در مدلهايي با المانهاي مثلثي خطي, توسط مؤلفين نوشته شده است.

## مدل كردن ترك دو بعدي به روش المان محدود توسعه يافته

در المان محدود توسعه يافته از همان توابع شكل المان محدود استاندارد استفاده مي‌شود [۵] و تنها درجات آزادي گره‌هاي اطراف ترك افزايش پيدا مي‌كند. براي تعيين نوع تابع مناسب جهت افزايش درجات آزادي گره‌ها (غني‌سازي)، محل برخورد ترك با اضلاع المانها مشخص مي‌گردد اگر ترك در دو ناحيه اضلاع يك المان را ببرد از تابع پله‌اي واحد جهت غني‌سازي گره‌هاي اطراف آن المان استفاده خواهد شد (گره‌هاي مشخص شده با دايرة توپر در شكل ۱) و اگر ترك تنها يكي از اضلاع المان را قطع كند و يا به عبارت ديگر نوك ترك داخل المان باشد براي گره‌هاي اطراف آن المان غني‌سازي به روش تابع تكينه انجام خواهد گرديد (گره‌هاي مشخص شده با مربع توپر در شكل ۱). براي غني‌سازي از طريق تابع پله‌اي واحد از يك تابع دو مقداري H به صورت زير استفاده مي‌شود[۵].

$$H = \begin{cases} +1 \quad ; \quad \text{اگر} \quad y > \circ \\ -1 \quad ; \quad \text{اگر} \quad y < \circ \end{cases} \qquad (۱)$$

براي استفاده از تابع فوق محور Xها را به صورت محلي در امتداد ترك قرار داده به گونه‌اي كه جهت مثبت آن به سمت نوك ترك باشد در اين شرايط نقاط بالاي محور Xها $(y > \circ)$ داراي H برابر۱+ ودرغيراينصورت برابر۱- مي‌شود.

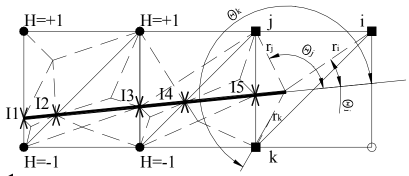


شكل ۱ : نمايش گره‌هايي كه نياز به غني‌سازي جهت افزايش درجات آزادي دارند

غني‌سازي در گره‌هاي اطراف نوك ترك از طريق تابع تكينه انجام مي‌شود تا بهترين تطبيق را با شرايط واقعي جابجاييهاي اطراف نوك ترك پيدا كند. عبارتي كه ايجاد حالت تكينه در نقاط اطراف نوك ترك مي‌نمايد $\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}$ مي‌باشد كه $r,\theta$ مختصات قطبي نقاط اطراف نوك ترك در دستگاه مختصات قطبي واقع در نوك ترك است. البته براي افزايش دقت جوابها عبارات ديگري نيز به عبارت مربوط به تكينه‌سازي اضافه مي‌شود كه اين عبارات از رابطة بين جابجاييهاي نقاط اطراف نوك ترك برحسب موقعيت آن نقاط ضرايب شدت تنش در نوك ترك به دست مي‌آيند كه در نهايت تابع چهار جمله‌اي به صورت زير براي غني‌سازي گره‌هاي اطراف نوك ترك مورد استفاده قرار مي‌گيرد[۱۳].

$$\begin{gathered} a = \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2} \quad ; \quad b = \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2} \\ c = \sqrt{r}\sin\theta\sin\frac{\theta}{2} \quad ; \quad d = \sqrt{r}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} \\ [\phi_\alpha, \alpha = 1,4] = [a,b,c,d] \end{gathered} \qquad (۲)$$

مطابق شكل ۲ دو گره بالاي ترك با $H = +1$ و دو گره پايين ترك با $H = -1$ غني مي‌شوند و گره i از المانی كه نوك ترك درون آن واقع است توسط تابع $\phi$ و مختصات $(r_i,\theta_i)$ غني مي‌شود و گره‌هاي j و k به ترتيب با $(r_j,\theta_j)$ و $(r_k,\theta_k)$ درجات آزادي‌شان افزايش پيدا مي‌كند. همچنين در شكل ۲ تقسيم بندي الماني المانهاي ترك خورده و المان نوك ترك مشاهده مي‌شود كه به واسطه اين تقسيم بندي تعدادي المان مثلثي جديد در دو سمت ترك ايجاد مي‌گردد كه براي به دست آوردن ماتريس سفتي كل المان, مورد استفاده قرار مي‌گيرد.



شكل ۲ : پارامترهاي مربوط به غني‌سازي گره‌هاي اطراف ترك و تقسيم بندي المانهاي ترك خورده

## روابط حاكم بر غني‌سازي گره‌ها

پس از تعيين گره‌هايي كه نياز به غني‌سازي دارند و مشخص نمودن نوع تابع مناسب براي غني‌سازي آنها، بايد با اعمال تابع مناسب، ايجاد ناپيوستگي مجازي در محل ترك نمود. اين كار از طريق روابط زير انجام مي‌شود [٣].

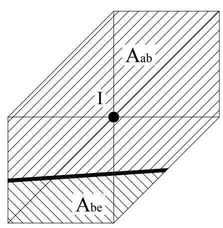
$$v = \sum_{I=1}^{N} N_I \left[ \underbrace{v_I}_{I\varepsilon N} + \underbrace{Ha_I}_{I\varepsilon P} + \sum_{\alpha=1}^{4} \underbrace{\phi_\alpha \quad b_{\alpha I}}_{I\varepsilon Q} \right] \qquad (٣)$$

$$u = \sum_{I=1}^{N} N_I \left[ \underbrace{u_I}_{I\varepsilon N} + \underbrace{Hc_I}_{I\varepsilon P} + \sum_{\alpha=1}^{4} \underbrace{\phi_\alpha \quad d_{\alpha I}}_{I\varepsilon Q} \right] \qquad (٤)$$

در روابط فوق $N_I$ تابع شكل در روش المان محدود استاندارد، $u_I, v_I$ جابجايي‌گره I ام به ترتيب در راستاي x , y مربوط به حل المان محدود استاندارد مي‌باشد كه به همة گره‌ها را شامل مي‌گردد (مجموعة N). $c_I, a_I$ ضرايب مجهول مربوط به درجات آزادي افزايش يافته مرتبط با تابع غني‌ساز پله‌اي واحد به ترتيب در جهات x , y است كه فقط براي گره‌هاي اطراف المانهاي كاملاً بريده شده توسط ترك به كارگرفته مي‌شوند (مجموعة گره‌هاي P). $d_{\alpha I}$ ، $b_{\alpha I}$ ضرايب مجهول نظير افزايش درجات آزادي مرتبط با تابع غني‌كنندة تكين به ترتيب در جهات x , y مي‌باشد كه فقط براي سه گره اطراف الماني كه نوك ترك در آن واقع است (مجموعة Q) به كار گرفته مي‌شود. براي قرار گرفتن گره در مجموعة P علاوه بر شرايطي كه تا به حال ارائه گرديده، شرط ديگري نيز بايد برقرار باشد. وقتي ترك الماني را در دو ناحيه قطع كند مجموعة المانهاي اطراف آن گره به دو ناحيه تقسيم مي‌شود. اگر اندازة سطح در يك سمت ترك $A_{ab}$ و در سمت ديگر ترك $A_{be}$ و سطح كل مجموعة المانهاي آن گره A باشد، نسبتهاي زير مطابق شكل٣ قابل‌تعريف است [ ٦ ].

$$r_{ab} = \frac{A_{ab}}{A} \quad , \quad r_{be} = \frac{A_{be}}{A} \qquad (٥)$$

اگر هر يك از نسبتهاي $r_{ab}$ يا $r_{be}$ كوچكتر از $10^{-4}$ باشد، گره I ام مربوط به آن مجموعة الماني از مجموعة گره‌هاي P حذف مي‌شود[٦].




شكل ٣ : تقسيم سطح مجموعة المانهاي مربوط به گره I ام به دو سطح نسبت به موقعيت ترك

## استخراج رابطة سفتي براي انواع المان

در المان محدود استاندارد از طريق رابطة انرژي كرنشي المان مي‌توان ماتريس سفتي المان را به دست آورد كه به صورت زير است [١٤].

$$K_e = t_e A_e [B]^T [D][B] \qquad (٦)$$

در رابطة فوق، D ماتريس تنش- كرنش ماده است، $t_e$ ضخامت ، $A_e$ مساحت و [B] ماتريس كرنش-جابجايي المان است. مساحت هر المان برابر با نصف دترمينان ماتريس ژاكوبين انتقال مختصات (از مختصات عمومي به مختصات ايزو پارامتريك) مي‌باشد. اگرJ ماتريس ژاكوبين باشد و گره‌هاي هر المان در جهت عكس عقربه‌هاي ساعت با $k, j, i$ مشخص شوند det J به صورت زير تعريف مي‌شود [١٤].

$$\det J = x_{ik}\, y_{jk} - x_{jk}\, y_{ik} \qquad (٧)$$

$$y_{jk} = y_j - y_k \quad , \quad x_{kj} = x_k - x_j \qquad (٨)$$

ماتريس [B] از طريق جاگذاري روابط ٥ و ٦ درون رابطه كرنش بر حسب جابجايي و استفاده از ماتريس ژاكوبين انتقال و معكوس آن به دست مي‌آيد [ ١٤ ] .

در المان محدود توسعه يافته نيز پس از تقسيم‌بندي المانهاي ترك خورده (مطابق شكل ٢)، المانهاي مثلثي پيوسته در دو طرف ترك ايجاد مي‌شود. لذا مي‌توان به صورت مستقيم از رابطة (٦) براي يافتن ماتريس سفتي هر المان استفاده كرد، فقط بايد تأثير درجات آزادي افزوده شده به گره‌هاي غني شده, در ابعاد ماتريس [B] در نظر گرفته شود. لذا براي هر نوع گره سهم مناسبي در ماتريس [B] به دست مي‌آيد.

اگرگره $i$ نياز به غني‌سازي نداشته باشد در حالت دو بعدي ٢ درجة آزادي خواهد داشت و سهم آن در ماتريس [B] به صورت زير خواهد بود [ ١٥ ] .

$$B_i = \frac{1}{\det \ J} \begin{bmatrix} y_{jk} & \circ \\ \circ & x_{kj} \\ x_{kj} & y_{jk} \end{bmatrix} \qquad (٩)$$

اگرگره $i$ نياز به غني‌سازي از طريق تابع پله‌اي واحد داشته باشد در حالت دو بعدي ٤ درجة آزادي خواهد داشت و سهم آن در ماتريس[B]به‌صورت‌زيربه‌دست‌مي‌آيد [ ١٥ ].

$$B_i = \frac{1}{\det \ J} \begin{bmatrix} y_{jk} & \circ & y_{jk} H_i & \circ \\ \circ & x_{kj} & \circ & x_{kj} H_i \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{kj} H_i & y_{jk} H_i \end{bmatrix} \qquad (١٠)$$

اگر گره $i$ نياز به غني‌سازي از طريق تابع تكينه داشته باشد در حالت دو بعدي ١٠ درجة آزادي خواهد داشت و

سهم آن در ماتريس[B]  به صورت زيرخواهد بود [ ۱۵ ].

$$a_i = \sqrt{r_i}\,\sin\frac{\theta_i}{2} \quad ; \quad b_i = \sqrt{r_i}\,\cos\frac{\theta_i}{2} \qquad (۱۱)$$

$$c_i = \sqrt{r_i}\,\sin\theta_i\,\sin\frac{\theta_i}{2} \quad ; \quad d_i = \sqrt{r_i}\,\sin\theta_i\,\cos\frac{\theta_i}{2}$$

$$B_i = \frac{1}{\det J}\begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{jk}a_i & y_{jk}b_i & y_{jk}c_i & y_{jk}d_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{kj}a_i & x_{kj}b_i & x_{kj}c_i & x_{kj}d_i \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{kj}a_i & x_{kj}b_i & x_{kj}c_i & x_{kj}d_i & y_{jk}a_i & y_{jk}b_i & y_{jk}c_i & y_{jk}d_i \end{bmatrix}$$

بنابراين سهم  هر سه نوع كلي گره به طور جداگانه در روش المان محدود توسعه يافته، درون ماتريس [B] به دست آورده شد ( روابط ۹، ۱۰و ۱۱) كه با توجه به نوع گره‌هاي اطراف هر المان مي‌توان ماتريس كلي [B] را براي آن المان بدست آورد. سپس از طريق رابطة ٦ ماتريس سفتي مربوط به آن المان مشخص مي‌گردد. از جمع ماتريس سفتي تك تك المانهاي داخل المان ترك خورده مي‌توان ماتريس سفتي كل المان ترك خورده را به دست آورد. جمع ماتريسهاي سفتي درون الماني, مشابه روش مونتاژ ماتريسهاي سفتي هر المان در ماتريس سفتي كل مي‌باشد كه در نهايت تنها سطرها و ستونهاي مربوط به نقاط داخل المان ترك خورده, از ماتريس سفتي كل المان ترك خورده حذف مي‌شود. سپس ماتريس سفتي هر المان در ماتريس سفتي كل مدل مونتاژ مي‌گردد [۱۵].

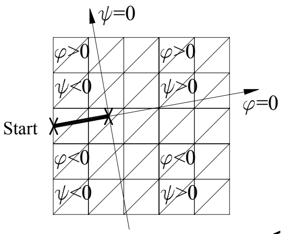
## اعمال روش المان محدود توسعه يافته در برنامة كامپيوتر

اصول روش المان محدود توسعه يافته در قسمتهاي قبل ارائه شد. در اين قسمت چگونگي اعمال آن اصول در قالب يك نرم‌افزار المان محدود توسعه يافته به نام MEXFEM2D جهت تحليل سازه‌هاي ترك‌دار دو بعدي توضيح داده مي‌شود. اين نرم‌افزار براي تحليل مدلهايي با المانهاي مثلثي‌خطي به زبان Visual - Fortran 6.5 ارائه شده است. قسمتهاي اصلي اين برنامه به صورت زير است :

الف ) مرحلة « پيش از تحليل»

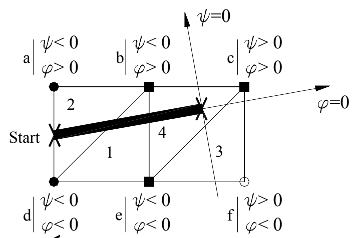
در اين قسمت اطلاعاتي از قبيل هندسة مدل، تعداد گره، تعداد المان، مختصات گره، شمارة هر المان، شمارة محلي و عمومي گره‌ها، شرايط مرزي و بارگذاري وارد برنامه مي‌شود. همچنين مشخصات ترك به دو روش در برنامه قابل تعريف است. روش اول ارائه مختصات نقطة شروع و پايان ترك است و روش دوم مشخص كردن نقطة شروع، طول و زاوية ترك نسبت به محور + x مي‌باشد.

جهت تشخيص  موقعيت نسبي ترك و المانها و متعاقب آن تعيين نوع غني‌سازي مناسب و پارامترهاي آن, براي گره‌ها در اين مقاله از روش جديد دستگاه مختصات متعامد محلي نوك ترك $(\phi-\psi)$ استفاده مي‌شود. در اين روش مطابق شكل ٤ محور $\phi = ۰$ را در راستاي ترك و به سمت خارج از آن و محور $\psi = ۰$  عمود بر $\phi$ به صورت راستگرد در نظر گرفته مي‌شود [۱۵].




شكل٤ : دستگاه مختصات متعامد محلي نوك ترك

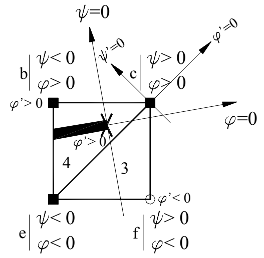
در شكل ٤ علامت $\phi$ و$\psi$ در چهار ناحية ايجاد شده توسط دستگاه مختصات متعامد$(\phi-\psi)$ ديده مي‌شود. براي هر گره در محدودة اطراف نوك ترك  $\phi$ و  $\psi$  محاسبه مي‌شود و سپس در هر المان مقدار بيشترين و كمترين مقدار$\phi$  و$\psi$  تعيين مي‌گردد. اگر در الماني $\phi_{\min}.\phi_{\max} \geq ۰$ باشد, ترك آن المان را قطع نمي‌كند و اگر $\phi_{\min}.\phi_{\max} < ۰$  باشد، احتمالاً ترك با المان برخورد مي‌كند. جهت تعيين وضعيت به علامت $\psi$  توجه مي‌شود. مطابق شكل ۵ اگر در آن المان$\psi_{\min}\psi_{\max} \leq ۰$ و  باشد, ترك در دو نقطه المان را قطع مي‌كند و در نتيجه غني‌سازي به روش تابع پرشي (پله‌اي) واحد براي گره‌هاي اطراف آن المان لازم خواهد بود و درجات آزادي از ۲ به ٤ افزايش مي‌يابد و اگر $\psi_{\min}\psi_{\max} \geq ۰$ و  باشد ترك با المان برخوردي نخواهد داشت و اگر $\psi_{\min}.\psi_{\max} < ۰$ باشد، نوك ترك احتمالاً درون آن المان قرار گرفته است [۱۵].




شكل ۵ : بررسي علامت $\phi$  و $\psi$  در گره‌هاي اطراف المانهاي ترك خورده

ممكن است دو يا چند المان به طور همزمان شرط آخر را ارضاء كنند و داراي شرايط در برگيرندة احتمالي نوك ترك باشند كه در چنين شرايطي براي تشخيص دقيق موقعيت

نوك ترك مطابق شكل ٦ دستگاه مختصات جديد ($\phi'$-$\psi'$) به صورت راستگرد روي يكي از دو گره مشترك بين دو المان قرار داده مي‌شود به طوريكه محور $\phi'$ در راستاي خط واصل بين دو گره مشترك باشد سپس مقادير $\phi'$ نوك ترك و گره‌هاي سوم هر يك از المانها در دستگاه جديد محاسبه مي‌شود. علامت $\phi'$ نوك ترك با علامت $\phi'$ مربوط به يكي از گره‌هاي سوم المانها يكسان خواهد بود كه در نتيجه نوك ترك در داخل همان المان قرار مي‌گيرد كه گره‌هاي اطراف آن توسط تابع تكينه غني مي‌شودودرجات‌آزادي آنها از ٢ به ١٠ افزايش مي‌يابد [١٥].




شكل ٦ : موقعيت دستگاه مختصات جهت تشخيص المان حاوي نوك ترك

براي گره‌هاي ٤ درجة آزادي اگر مقدار $\phi > ٠$ باشد مقدار H برابر ١+ و در غيراينصورت ١- خواهد بود. براي گره‌هاي ١٠ درجة آزادي نيز مطابق شكل ٢ فاصله تا نوك ترك ($r$) و زاويه با امتداد ترك ($\theta$) تعيين مي‌شود. در اين بخش با توجه به تعداد درجات آزادي گره‌ها و پارامترهاي به دست آمده از قسمت قبل ماتريس [B] از طريق روابط ٩ يا ١٠ و يا ١١ به دست آورده مي‌شود و سپس ماتريس سفتي هر المان از طريق رابطة ٦ مشخص مي‌گردد. پس از مونتاژ اين ماتريسها, ماتريس سفتي كل سازه به دست مي‌آيد. در پايان اين قسمت دستگاه معادلات بر اساس روش المان محدود توسعه يافته به فرم كلي [K][U]=[F] به دست مي‌آيد. [K] ماتريس سفتي كل مدل است كه متقارن مي‌باشد، [U] ماتريس مجهولات گره‌اي است كه در آن، مجهولات مربوط به درجات آزادي استاندارد (جابجايي در جهت y,x هرگره) و درجات آزادي مرتبط با تابع غني‌ساز هر گره (در صورت وجود) به صورت متوالي قرار گرفته است. [F] نيز ماتريس نيروهاي خارجي اعمال شده به گره‌ها مي‌باشد [١٥].

ب ) مرحلة «تحليل»

در اين مرحله ابتدا شرايط مرزي به روش پنالتي اعمال مي‌شود و سپس به روش حذفي گاوس دستگاه معادلات حاصله تحليل مي‌گردد [١٤].

ج ) مرحلة «پس از تحليل»

مجهولات گره‌اي حاصله پس از تحليل دستگاه معادلات، درون روابط (٣) و (٤) قرار داده مي‌شود تا جابجاييهاي گره‌اي در هر جهت مشخص گردد. بديهي است گره‌هايي كه تحت تأثير توابع غني‌ساز قرار گرفته‌اند جابجاييهايشان تغيير مي‌كند هرچند كه پيوستگي المان حفظ شده است. به عبارت ديگر همانطور كه قبلاً اشاره شد ترك و ناپيوستگي در روش المان محدود توسعه يافته به صورت مجازي مدل مي‌شود.

براي تعيين ضرايب شدت تنش در نوك ترك با توجه به رابطة اين ضرايب $(K_I, K_{II})$ با جابجاييهاي عمودي و افقي نقاط در اطراف نوك ترك, ابتدا از طريق درونيابي خطي داخل المان حاوي نوك ترك, جابجاييهاي نقاط در اطراف نوك ترك به دست آورده مي‌شود. بدين منظور با داشتن مختصات نقطة مورد نظر (f) و مختصات گره‌هاي اطراف المان حاوي نوك ترك, ضرايب تابع شكل در نقطه را محاسبه‌كرده $(N_{f1}, N_{f2}, N_{f3})$ وسپس‌طبق رابطة خطي زيرجابجاييهاي‌افقي‌وعمودي‌در نقطه محاسبه مي‌شود [١٤].

$$u_f = N_{f1}u_1 + N_{f2}u_2 + N_{f3}u_3 \qquad (١٢)$$

$$v_f = N_{f1}v_1 + N_{f2}v_2 + N_{f3}v_3 \qquad (١٣)$$

در اين مقاله جهت افزايش دقت نتايج يكبار براي دو نقطة I و J و بار ديگر براي سه نقطة I , J و K روي ترك جابجاييهاي افقي و عمودي به دست آورده مي‌شود. با استفاده از جابجاييهاي محاسبه شده و در نظر گرفتن رابطة برونيابي خطي در حالت دو نقطه [١٧] و نيز برونيابي از درجة ٢ در حالت سه نقطه [١٥], مي‌توان پس از حل دستگاههاي دو معادله و دو مجهول براي دو نقطه (روابط ١٤ و ١٥) و دستگاههاي سه معادله و سه مجهول براي سه نقطه (روابط ١٦ و ١٧), جابجاييهاي عمودي و افقي را در نوك ترك (r=0) به دست آورد (ضرايب A و C ).

$$(١٤)\quad \begin{cases} \dfrac{|v_I|}{\sqrt{r_I}} = A + Br_I \\ \dfrac{|v_J|}{\sqrt{r_J}} = A + Br_J \end{cases} \qquad (١٥)\quad \begin{cases} \dfrac{|u_I|}{\sqrt{r_I}} = C + Dr_I \\ \dfrac{|u_J|}{\sqrt{r_J}} = C + Dr_J \end{cases}$$

$$(١٦)\quad \begin{cases} \dfrac{|v_I|}{\sqrt{r_I}} = A + Br_I + Er_I^2 \\ \dfrac{|v_J|}{\sqrt{r_J}} = A + Br_J + Er_J^2 \\ \dfrac{|v_K|}{\sqrt{r_K}} = A + Br_K + Er_K^2 \end{cases} \qquad (١٧)\quad \begin{cases} \dfrac{|u_I|}{\sqrt{r_I}} = C + Dr_I + Fr_I^2 \\ \dfrac{|u_J|}{\sqrt{r_J}} = C + Dr_J + Fr_J^2 \\ \dfrac{|u_K|}{\sqrt{r_K}} = C + Dr_K + Fr_K^2 \end{cases}$$

در روابط فوق r فاصلة نقطة مورد نظر تا نوك ترك مي‌باشد. ضرايب A و C به ترتيب جابجاييهاي عمودي و

افقي نوك ترك هستند كه با ضرايب شدت تنش در نوك ترك به صورت زير ارتباط دارند [١٧].

$$K_I = \sqrt{2\pi}\,\frac{\mu}{1+\kappa}A \quad (١٨) \qquad K_{II} = \sqrt{2\pi}\,\frac{\mu}{1+\kappa}C \quad (١٩)$$

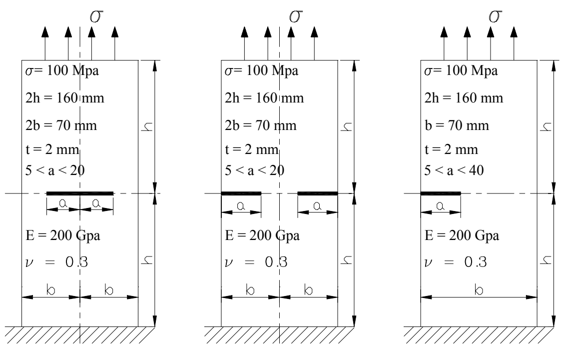
در روابط فوق $\mu$ مدول برشي است و $\kappa$ به صورت زير مشخص مي‌گردد [١٦].

$$\kappa = \begin{cases} 3-4\nu & ; \quad \text{Plane Strain} \\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu} & ; \quad \text{Plane Stress} \end{cases} \quad (٢٠)$$

## تحليل عددي چند سازة تركدار دو بعدي

در اين قسمت حالتهاي مختلف ترك با ابعاد مختلف, توسط نرم افزار تخصصي نوشته شده توسط مؤلفين (MEXFEM2D) تحليل مي‌گردد. جهت بررسي تأثير ابعاد المانها و چگونگي مش‌بندي دو نوع مدل با مشهاي درشت و ريز ايجاد شده است تا تأثير ابعاد المان در نتايج روش المان محدود توسعه يافته بررسي شود. مدل با المانهاي درشت ٤٢٠ گره و ٧٥٤ المان و مدل با المانهاي ريز ١٢٤٨ گره و ٢٣٤٦ المان دارد كه البته درجات آزادي كل مدل بسته به وضعيت ترك متفاوت خواهد بود. المانها از نوع مثلثي خطي به صورت منظم مشابه شكل ٤ مي‌باشد.

شكل ٧ مشخصات هندسي ، بارگذاري ، تكيه‌گاهي و جنس مدلهاي مختلف را نشان مي‌دهد. نوع تحليل در همه موارد از نوع تنش صفحه‌اي در نظر گرفته شده است.




ج – ترك مركزي افقي ب – ترك مرزي دوطرفه الف – ترك مرزي يك طرفه

شكل ٧ : مشخصات هندسي، بارگذاري، تكيه‌گاهي و جنس مدلها با انواع ترك

## بحث پيرامون نمودارهاي حاصل از تحليل

در همة موارد, مدل كردن ترك با ورود مشخصات هندسي ترك به سادگي انجام شده و زمان تحليل نيز با كامپيوترهاي خانگي معمولي كوتاه بوده است (براي مدل با المانهاي ريز كه ابعاد الماني حدود ٣ ميلي متر مي‌باشد تقريباً ٥ دقيقه). منحنيهاي موجود در نمودارهاي زير براساس نتايج حاصل از تحليل نرم‌افزار MEXFEM2D كه بر مبناي نتايج حاصل از روابط تحليلي موجود در كتابهاي مرجع [١٦ و ١٨] نرمال شده, ترسيم گرديده است.

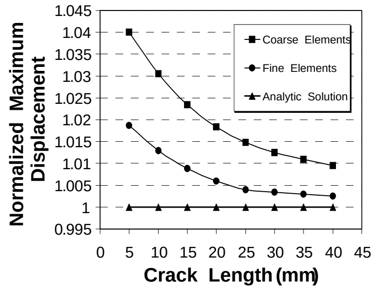
نمودارهاي ١ و ٢ مربوط به مدلهاي داراي ترك مرزي يك طرفه,نمودارهاي٣ و ٤ براي مدلهاي‌با ترك مرزي‌دو طرفه و نمودارهاي٥و٦ مربوط‌به‌مدلهاي‌باترك‌مركزي افقي مي‌باشد.

نمودار ١ تغييرات بيشترين اندازة باز شدن ترك در لبة آزاد ورق را بر حسب طول ترك نشان مي‌دهد كه براي مدل با المانهاي درشت و ريز به صورت نرمال شده ترسيم گرديده است. همانطور كه مشاهده مي‌شود دقت نتايج در حد قابل قبولي است و كمتر از ٤ درصد خطا در مدل با المان درشت و حداكثر ٢ درصد خطا در مدل با المان ريز وجود دارد. با ريز شدن المانها دقت افزايش مي‌يابد و همچنين با افزايش طول ترك و زياد شدن درجات آزادي مدل, نتايج دقيقتر و پراكندگي كمتر مي‌شود.

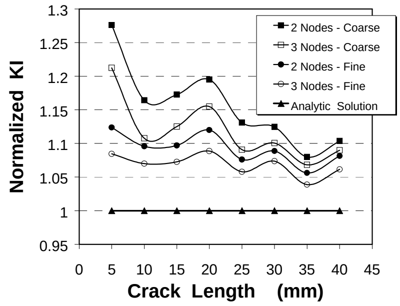
نمودار ٢ تغييرات $K_I$ را بر حسب طول ترك به صورت نرمال شده ارائه مي‌كند. براي مدلهاي با المان ريز و درشت به دو روش دو نقطه در روي ترك و سه نقطه در روي ترك $K_I$ محاسبه شده است كه در روش سه نقطه در روي ترك به دليل اينكه به صورت غير خطي برونيابي جهت يافتن جابجايي نوك ترك انجام مي‌شود و با واقعيت فيزيكي تطبيق بيشتري دارد لذا دقت نتايج اين روش بيشتر مي‌شود ( بين ١/٥ تا ٦ درصد كاهش خطا ). ريز كردن المانها بيش از روش سه نقطه, در دقت نتايج مؤثر است و همانطور كه مشاهده مي‌شود روش دو نقطه با المان ريز, دقت بيشتري نسبت به المان درشت و روش سه نقطه دارد. نكتة ديگر اينكه ريز كردن المانها و انتخاب روش سه نقطه در افزايش دقت نتايج در تركهاي با طول كم مؤثرتر است و در نتيجه به خوبي مشاهده مي‌شود كه در اين شرايط پراكندگي جوابها كم مي‌شود و نرخ خطا در طولهاي مختلف يكنواخت تر مي‌گردد.

بيشترين اندازة باز شدن ترك براي مدل با ترك مرزي دو طرفه در نمودار ٣ و براي مدل با ترك مركزي افقي در نمودار ٥ به صورت نرمال شده نمايش داده شده است. در هر دو نمودار, مدلهاي با المان ريز دقت بيشتري دارند و با افزايش‌درجات‌آزادي, نتايج دقيقترو‌پراكندگي‌كمتر مي‌شود.

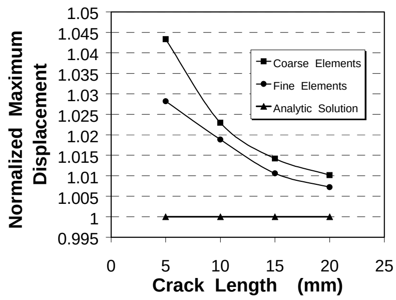
نمودارهاي ٤ و ٦ تغييرات $K_I$ را به صورت نرمال به ترتيب براي مدل داراي ترك مرزي دو طرفه و مدل با ترك مركزي افقي, با المان درشت و ريز به روشهاي ٢ نقطه و ٣ نقطه نشان مي‌دهد. نتايج هر دو نمودار مشابه نمودار ٢ مي‌باشد و با ريز شدن المانها و انتخاب روش ٣ نقطه, دقت جوابها افزايش و پراكندگي كاهش مي‌يابد.



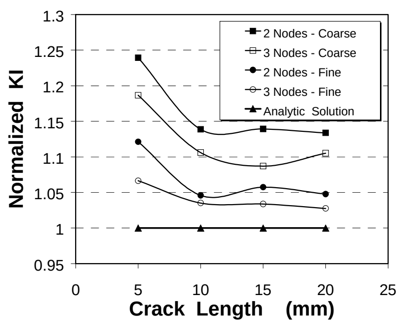

نمودار ١ : بيشترين اندازة باز شدن نرمال شده براي ترك مرزي يك طرفه بر حسب طول ترك



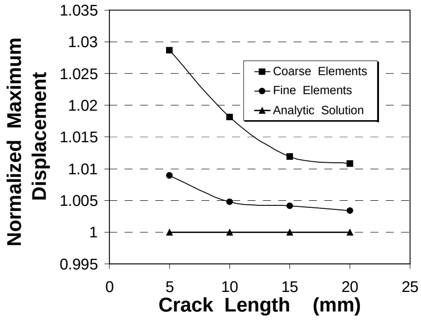

نمودار ٢ : منحنيهاي تغييرات $K_I$ نرمال شده براي ترك مرزي يك طرفه بر حسب طول ترك



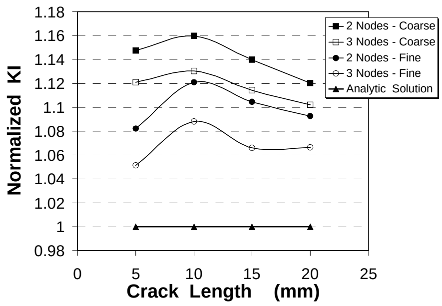

نمودار ٣ : بيشترين اندازة باز شدن نرمال شده براي ترك مرزي دو طرفه بر حسب طول ترك




نمودار ٤ : منحنيهاي تغييرات $K_I$ نرمال شده براي ترك مرزي يك طرفه بر حسب طول ترك




نمودار ٥ : بيشترين اندازة باز شدن نرمال شده براي ترك مركزي افقي بر حسب طول ترك




نمودار ٦ : منحنيهاي تغييرات $K_I$ نرمال شده براي ترك مركزي افقي بر حسب طول ترك

## نتيجه گيري

المان محدود توسعه يافته روشي خوب و كارآمد جهت مدل كردن ناپيوستگيهاي هندسي از جمله ترك است. از ويژگيهاي اين روش امكان مدل كردن ترك به سادگي و سرعت تحليل بالا مي‌باشد. بي‌نيازي از به‌كارگيري المانهاي تكينه در اطراف نوك ترك و نيز امكان استفاده از المانهاي درشت در اطراف ترك از ديگر ويژگيهاي اين روش است. استفاده از روش جديد دستگاه مختصات متعامد محلي در نوك ترك جهت تشخيص گره‌هاي نيازمند غني‌سازي و تعيين پارامترهاي مورد نياز براي آن مناسب بوده است و اگر اندازة المانها مناسب انتخاب شود با اعمال توابع غني‌ساز مناسب و افزايش درجات آزادي گره‌ها, جابجاييهاي مربوط به آنها با دقت خوبي محاسبه مي‌شوند كه اگر در اين شرايط روش خوبي براي محاسبة $K_I$ در نظر گرفته شود امكان دسترسي به نتايج با دقت خوب فراهم مي‌شود. با ريز شدن المانها دقت افزايش مي‌يابد البته اين موضوع هميشه در تحليل المان محدود درست است هر چند كه المان مثلثي خطي به طور ذاتي نسبت به ابعاد المان حساسيت بيشتري دارد. با افزايش طول ترك و در نتيجه زياد شدن درجات آزادي مدلها, جابجاييهاي

گره‌اي دقيقتر محاسبه مي‌شوند. از ميان روشهاي محاسبة $K_I$ روش ۳ نقطه در پشت ترك به دليل استفاده از برونيابي غير خطي براي يافتن جابجايي نوك ترك, نسبت به روش ۲ نقطه كه به صورت خطي اين كار را مي‌كند دقيقتر است. ريز كردن المانها نسبت به تغيير روش از ۲ نقطه به ۳ نقطه, در دقت نتايج مؤثرتر است. با ريز شدن المانها و استفاده از روش ۳ نقطه علاوه بر اينكه $K_I$ در تمام طول ترك دقيقتر مي‌شود, افزايش دقت بيشتري در دقت نتايج با طول ترك كوتاه مشاهده مي‌شود در نتيجه با توجه به اينكه در ترك با طول كم به طور نسبي, دقت جابجاييهاي گره‌اي كم بود بنابراين اثر اين دو عامل باعث ايجاد يكنواختي بيشتر وپراكندگي كمتر در نتايج $K_I$ مي‌شود. در همة نمودارها مقادير باز شدن ترك و نيز $K_I$ به دست آمده از طريق نرم‌افزار نوشته شده(MEXFEM2D), از ميزان واقعي آن كه از طريق روابط تحليلي محاسبه مي‌شود بيشتر است.

## مراجع


1. Belytshko T., Lu YY, Gu L., "Element-Free Galerkin Methods" , International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.37, pp. 229- 256, 1994.
2. Fleming M., Chu YA, Moran B., Belytshko T., "Enriched Element–Free Galerkin Method for Three-Dimensional", Journal for Numerical Methods in Engineering , Vol.40, pp.1483-1504, 1997.
3. Melenk J.M. and Babuska I., "The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications" ,Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.139, pp.289 -314, 1996.
4. Duarte C.A. and Oden J.T., "An H-p Adaptive Method Using Clouds",Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.139, pp.237-262, 1996.
5. Moes N., Dolbow J. , and Belytschko T. , "A Fnite Element Method for Crack Growth Without Remeshing", International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol.46, No.1, pp.131-150, 1999.
6. Dolbow J.,"An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics " , Ph.D. Thesis , theoretical and Applied Mechanics, Northwestern University , Evanston , IL, U.S.A, 1999.
7. Dolbow J. , Moes N. , and Belytschko T., "Discontinuous Enrichment in Finite Elements With a Partition of Unity Method" , Finite Elements in Analysis and Design, Vol.36, pp.235-260, 2000a.
8. Daux C., Moes N., Dolbow J., Sukumar N. and Belytschko T., "Arbitrary Cracks and Holes with the Extended Finite Element Method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.48, No.12, pp.1741-1760, 2000.
9. Sukumar N. , Moes N. , Moran B. and Belytschko T. , "Extended Finite element Method for Three-Dimensional Crack Modeling " , International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.48, No.11, pp.1549-1570, 2000.
10. Stolarska M. ,Chopp D. L. ,Moes N. and Belytschko T., "Modeling Crack Growth by Level Sets and the Extended Finite Element Method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.51, No.8, pp.943-960, 2001.
11. Sukumar N. , Chopp D. L. , Moes N. and Belytschko T. , "Modeling Holes and Inclusions by Level Sets in the Extended Finite Element Method " , Computer Methods in Applied Mechanicsand ngineering,Vol.190,No.46,pp.6183-6200, 2001.
12. Sukumar N. , Chopp D. L. and Moran B. , "Extended Finite Element Method and Fast Marching Method for Three Dimensional Fatigue Crack Propagation", Engineering Fracture Mechanics, Vol,70, No.1, pp.29-48, 2003.
13. Belytschko T. and Black T. , "Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing " , International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.45, No.5, pp.601-620, 1999.
14. Chandrupatla T. R. and Belegundu A. D. , " Introduction to Finite Elements in Engineering " , Second Edition , Prentice Hall Press , New Jersey , pp. 1-174, 1997.
15. Pourkamali Anaraki A. , " Ph. D. Thesis Report" , November 2003.
16. Anderson T. L. , " Fracture Mechanics Fundamentals and Applications " , Second Edition , CRC Press USA , 1995.
17. Ansys 5.4 Manual, "POST1 - Crack Analysis ( KCALC. Command )", Manual in Help of Ansys Softwere , Part 19.8 , pp. (19-43)-(19-46) , 2000.
18. Tada H. , Paris P. C. and Irwin G. R. , " The Stress Analysis of Cracks Handbook",Third Edition , ASME Press , Professional Engineering Publishing London UK , pp. 39-54 , May 2000.